数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 51-69

偏微分作用素を用いた多変数留数計算アルゴリズムと中国剰余定理

新潟大学工学部情報工学科　田島　慎一(Shinichi TAJIMA)

1 序

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 次元アフィン空間 $\mathbf{C}^n$ を X とおく. 変数 $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in X$ を不定元とする多項式の組 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ であり正規列 (regular sequence) となるものが与えられたとする. これらの多項式 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ が生成するイデアルを I とおき, その零点集合 $V(I)=\{z\in X\mid f_1=\cdots=f_n=0\}$ を A で表す.

多項式 h に対し, n 次正則微分形式 $h(z)dz$ を分子として持つような代数的局所コホモロジー類 $[\dfrac{h(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}]$ をとり, このコホモロジー類が A の各点で定める Grothendieck 留数について考える.

よく知られているように, 点 $\alpha\in A$ が単純点であるならば, $f_1,f_2,...,f_n$ のヤコビ行列式を用いてその点 α における Grothendieck 留数値を表すことが出来る. この表現式を用いれば, 多項式環におけるグレブナ基底等を用いることで Grothendieck 留数を求めるアルゴリズムを構成することができる. それに対し, 点 $\alpha\in A$ の重複度が 1 より大きいようなときは, そこにおける多変数留数値の計算は一般には極めて困難である.

さて, 論文 [6],[7] において我々は, 各点 $\alpha\in A$ での Grothendieck 留数 $\mathrm{Res}_\alpha([\dfrac{h(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}])$ の値が零と等しくなるような正則微分形式 $h(z)dz$ 全体のなす空間は, ある種の偏微分作用素を用いることで特徴付けられることを示した. この結果を利用すると, 重複度が 1 より大きいような場合にも多変数留数の値を求めることが出来るようになる. 論文 [8], [10] では, Grothendieck 留数を計算するアルゴリズムを実際に導出した. 本稿では更に, このアルゴリズムに用いられた偏微分作用素と中国剰余定理を組み合わせることにより, Grothendieck 留数の計算アルゴリズムが局所化出来ることを示す.

2 準備と復習

この節ではまず, Grothendieck 留数を代数解析的に扱う際に必要となる基本的事項を述べ, 次に, [10] 等で与えた Grothendieck 留数の計算アルゴリズムの要点を簡単に復習しておく.

代数的局所コホモロジー類と偏微分方程式系

以下, $X = \mathbf{C}^n$ 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$, n 次正則微分形式のなす層を Ω_X で表す. 多項式の regular sequence $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ が $\mathcal{O}_X$ 上で生成するイデアルを $\mathcal{I} = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$ で表すことにする.

Grothendieck 留数が定める次の pairing

$$\Omega_X/\mathcal{I}\Omega_X \times \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{C}_A$$

は非退化なので, 層 $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)$ は, 層 $\Omega_X/\mathcal{I}\Omega_X$ の双対となる. 言い替えれば, $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)$ の要素は $\Omega_X/\mathcal{I}\Omega_X$ 上の線形汎関数 (超関数) を定義することになる. 従って, $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)$ あるいはその要素を解析学の対象として扱うことは自然であるが, この層 $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ 自体は偏微分をとる作用に関して閉じていない. そこで次の自然な写像

$$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I},\ \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

を用いて, 層 $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)$ を代数的局所コホモロジー群のなす層 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ に予め埋め込んでおいて, 解析的な議論が出来るようにしておく.

まず, $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)$ の要素 $\begin{bmatrix} 1 \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}$ をとり, 対応する代数的局所コホモロジー類 $i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}\right)$ に注目し, これを σ または $[\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ を用いて表すことにする. さらに, Σ を

$$\Sigma = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) \mid \mathcal{I}\eta = 0\}$$

で定める. このとき, 次が成り立つことは基本的である.

補題 1 (i) $\Sigma = i(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X))$.

(ii) Σ は $\mathcal{O}_X$ 上, コホモロジー類 $\sigma = [\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ により生成される.

一般に, n 次正則微分形式 $\varphi dz \in \Omega_X$ と局所コホモロジー類 $\eta \in \mathcal{H}^n_{\{A\}}(\mathcal{O}_X)$ が与えられたとき, $(\varphi dz, \eta)$ に対して, それらの積 $\varphi\eta dz \in \mathcal{H}^n_{\{A\}}(\Omega_x)$ の $\alpha \in A$ での留数値 $\mathrm{Res}_\alpha(\varphi\eta dz)$ を対応させることにより, pairing を定めることが出来る. 留数が定めるこの pairing を $\mathrm{Res}_\alpha\langle\varphi dz, \eta\rangle$ で表すことにする. 特に, 局所コホモロジー類 η が代数的局所コホモロジー類 σ である場合は,

$$\mathrm{Res}_\alpha\langle\varphi dz, \sigma\rangle = \mathrm{Res}_\alpha([\frac{\varphi(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}])$$

となる.

さて, X 上の正則関数係数の線形偏微分作用素全体のなす層をとり, $\mathcal{D}_X$ で表す. 代数的局所コホモロジー群のなす層 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ 加群の構造を持つので, 特に代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ に対しその annihilator ideal を次で定義することが出来る.

$$\mathcal{A}nn = \{R \in \mathcal{D}_X \mid R\sigma = 0\}.$$

代数的局所コホモロジー類 σ は $f_j\sigma = 0,\ j = 1, 2, ..., n$ を満たすので, 掛け算作用素 f_j を零階の偏微分作用素とみなしたものを F_j とおけば, 明らかに $F_j \in \mathcal{A}nn$ が成り立つ.

他方, n 次正則微分形式のなす層 Ω_X は, $\varphi dz \in \Omega_X, R \in \mathcal{D}_X$ に対して, $(\varphi dz)R = (R^*\varphi)dz$ とおくことにより, 右 $\mathcal{D}_X$-加群となる (但し, R^* は, 偏微分作用素 R の形式的随伴作用素を表す). いま特に, $\mathcal{A}nn$ に属する作用素 R をとると,

$$\mathrm{Res}_\alpha\langle(P^*\psi)dz, \sigma\rangle = \mathrm{Res}_\alpha\langle\psi dz, P\sigma\rangle = 0$$

が成り立つ. いま, ここで,

$$\mathcal{K} = \{\varphi dz \in \Omega_X \mid \mathrm{Res}_\alpha\langle\varphi dz, \sigma\rangle = 0, \quad \alpha \in A\}$$

とおく. 次が成り立つ.

定理 2 $\mathcal{K} = \{(R^*\psi)dz | R \in \mathcal{A}nn, \psi dz \in \Omega_X\}$.

明らかに $\mathcal{I}\Omega_X \subseteq \mathcal{K}$ が成り立つので剰余, $\mathcal{K}/\mathcal{I}\Omega_X \subseteq \Omega_X/\mathcal{I}\Omega_X$ をとることが出来ることを注意しておく. 以下, n 次の正則微分形式の係数部分のみに注目し, Ω_X と $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}\Omega_X$ と $\mathcal{I}$ とを同一視して議論をすすめる.

さて, 次の補題は, 証明は簡単であるが, アルゴリズムを構成する上で重要となる.

補題 3 一階の偏微分作用素 P が $P\sigma = 0$ を満たすとする. このとき P は Σ から Σ 自身への線形写像となる.

証明 いま η を Σ の任意の要素とする. 適当な $h(z) \in \mathcal{O}_X$ を用いて $\eta = h\sigma$ と表すことが出来る. 偏微分作用素 P を一階の部分 $P^{(1)}$ と零階の部分 $P^{(0)}$ とに分け, $P = P^{(1)} + P^{(0)}$ とおく. このとき, $P(h\sigma) = (P^{(1)}h)\sigma + hP\sigma$ となるが, 右辺の第 2 項は消えるので $P\eta = (P^{(1)})\sigma \in \Sigma$ を得る.

線形写像 $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ の双対をとることで次の結果を得る.

定理 4 一階の偏微分作用素 P が $P\sigma = 0$ を満たすとする. この偏微分作用素の形式随伴作用素を P^* で表す. このとき

$$P^* : \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

は, *well-defined* である.

多変数留数計算アルゴリズムの基本的アイデア

基本的な準備が整ったので, 以前に論文 [10] で与えた, Grothendieck 留数の計算アルゴリズムの概要を述べることにする.

以下簡単のため, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ の annihilator イデアル $\mathcal{A}nn$ は, 零階の偏微分作用素 $F_1, F_2, ..., F_n$ と (多項式係数の) 一階の偏微分作用素 P により生成されている場合に話を限って議論していく. (この左イデアル $\mathcal{A}nn$ の生成元として 2 階以上の偏微分作用素が必要となる時は, アルゴリズムを多少修正する必要があるがアルゴリズムを導出する際の基本的考え方は同じである)

いま, 多項式 $f_1 f_2, ..., f_n$ が多項式環 $\mathbf{Q}[z]$ において生成するイデアルを I とおく. 多項式 $h(z)$ がこのイデアル I の属すならば, $\mathrm{Res}_\alpha([\frac{h(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}]) = 0$ となることに注目する. 留数計算を行うため, 剰余空間 $\mathbf{Q}[z]/I$ を表現するベクトル空間を用意する. そのためには, まず, 多項式環 $\mathbf{Q}[z]$ に項順序を入れ, イデアル I のグレブナ基底を計算する. 対応する単項式基底 (monomial base) を用いてこれらの単項式が張るベクトル空間をとり, それを U とおく. 構成の仕方から明らかなように, U は剰余空間 $\mathbf{Q}[z]/I$ を表現するベクトル空間である.

偏微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* はベクトル空間 U からそれ自身への線形作用素となる. このことに注目して, ベクトル空間 U の部分ベクトル空間 V をつぎで定める.

$$V = \mathrm{Im}P^* = \{P^*u \mid u \in U\}.$$

多項式 $f_1, f_2, ...f_n$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(z_1, z_2, ..., z_n)}$ を $j_F(z)$ とおくと, $j_F(z)r(z) \in I$ となる必要十分条件は $r \in \sqrt{I}$ である. このことに注意して, ベクトル空間 W を

$$W = \{w \in U \mid w(z) = j_F(z)r(z) \bmod I, r(z) \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}\}$$

で定める. ここでも実際に計算を行う際には, イデアル $\sqrt{I}$ のグレブナ基底をとり, 対応する単項式基底をもちいることで剰余空間 $\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ を具体的に表現して計算する. また mod I による剰余計算もイデアル I のグレブナ基底を用いた割り算により行う. 次が成り立つことが示せる.

命題 5 $U = V \oplus W$

この同型を利用すると, 各点 $\alpha \in A$ での Grothendieck 留数

$$\mathrm{Res}_\alpha(h(z)\sigma dz) = \mathrm{Res}_\alpha([\frac{h(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}])$$

を計算することが出来るようになる.

まず最初に, 分子の多項式 h をイデアル I のグレブナ基底を利用してわり算し, その剰余を u とおく. 剰余多項式 u はベクトル空間 U に属すので, $u = v + w$ を満たす多項式の組 $v \in V$, $w \in W$ が存在する. 従って,

$$\mathrm{Res}_\alpha(h(z)\sigma dz) = \mathrm{Res}_\alpha(u(z)\sigma dz) = \mathrm{Res}_\alpha(v(z)\sigma dz) + \mathrm{Res}_\alpha(w(z)\sigma dz)$$

となるが, $\mathrm{Res}_\alpha(v(z)\sigma dz) = 0$ が成り立つ. ここで, $w(z) = j_F(z)r(z) \bmod \sqrt{I}$ となる多項式 $r \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ を用いれば,

$$\mathrm{Res}_\alpha(w(z)\sigma dz) = \mu_\alpha r(\alpha)$$

を得る. ただし μ_α は点 $\alpha \in A$ の重複度である. 以上のことをまとめると,

$$\mathrm{Res}_\alpha([\frac{h(z)dz}{f_1(z)\cdots f_n(z)}]) = \mu_\alpha r(\alpha), \quad \alpha \in A$$

を得る.

イデアル I の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\ell$ に対応した根基 $\sqrt{I}$ の素イデアル分解を $\sqrt{I} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \cdots \cap \sqrt{I_\ell}$ とおく. いま, $\alpha \in V(I_i)$ における留数値を求めたいとするならば, 多項式 r をイデアル $\sqrt{I_i}$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gb}(\sqrt{I_i}) = \{g_{i,1}, g_{i,2}, ..., g_{i,n}\}$ で更に割り, その余りを r_i とおく. 明らかに $\mu_\alpha r(\alpha) = \mu_\alpha r_i(\alpha)$ となる. Grothendieck 留数の値の満たすべき方程式を求めるには, 新たに不定元 t を導入し, $t - \mu_\alpha r_i(z), g_{i,1}(z), g_{i,2}(z), ..., g_{i,n}(z)$ が多項式環 $\mathbf{Q}[z, t]$ 上生成するイデアル $J = \langle t - \mu_\alpha r_i(z), g_{i,1}(z), g_{i,2}(z), ..., g_{i,n}(z)\rangle$ を考え, これらから変数 z を消去すれば良い. 即ち, イデアル $J \cap \mathbf{Q}[t]$ の生成元を求めれば, それが Grothendieck 留数の満たすべき方程式を与えることになる.

3 中国剰余定理と偏微分作用素

この節では中国剰余定理と偏微分作用素の関係を調べる. そのためにまず, いくつかの記号を導入し議論をおこなう準備をする.

まず, 層 $\mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の X 上の大域的切断全体 $H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X))$ をとり,

$$\Sigma = \{\eta \in H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) \mid f\eta = 0, \quad \forall\, f \in I\}$$

とおく. このベクトル空間 Σ は, 剰余 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ のベクトル空間としての双対空間と同一視することが出来る. 以下, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ をベクトル空間 Σ の要素とみなす. イデアル I の多項式環 $\mathbf{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]$ における準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\ell$ に対し, $A_i = V(I_i)$ とおくと, コホモロジー群の直和分解

$$H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) = H^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus H^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus H^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_X)$$

を得る. ここで $\Sigma_{A_i} = \Sigma \cap H^n_{[A_i]}(\mathcal{O}_X)$ とおく. 対応する代数的局所コホモロジー類 σ の直和分解を

$$\sigma = \sigma_{I_1} + \sigma_{I_2} + \cdots + \sigma_{I_\ell}, \quad \sigma_{I_i} \in \Sigma_{A_i}$$

とする. 次が成り立つ.

補題 6

(i) $\Sigma_{I_i} = \{\eta \in H^n_{[A_i]}(\mathcal{O}_X) \mid f\eta = 0, \quad \forall f \in I_i\}$,

(ii) Σ_{I_i} は $\mathbf{C}[z]$ 上, σ_{I_i} で生成される.

(iii) $\Sigma = \Sigma_{I_1} \oplus \Sigma_{I_2} \oplus \cdots \oplus \Sigma_{I_\ell}$.

ベクトル空間 Σ_{I_i} は剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[z]/I_i$ の双対ベクトル空間であるので, 直和分解 $\Sigma = \Sigma_{I_1} \oplus \Sigma_{I_2} \oplus \cdots \oplus \Sigma_{I_\ell}$ は中国剰余定理 $\mathbf{C}[z]/I = \mathbf{C}[z]/I_1 \times \mathbf{C}[z]/I_2 \times \cdots \times \mathbf{C}[z]/I_\ell$ を双対空間の言葉で言い替えたものに他ならない.

補題 7　偏微分作用素 P は, $P\sigma = 0$ を満たす一階の偏微分作用素であるとする. このとき, P は, 各 $i = 1, 2, ..., \ell$ に対しベクトル空間 Σ_{I_i} からそれ自身への線形写像となる.

証明　仮定 $P\sigma = 0$ より, $P\sigma_{I_i} = 0$ を得る. ベクトル空間 Σ_{I_i} の任意の要素 η は適当な h を用いて $\eta = h(z)\sigma_{I_i}$ と表せる. 偏微分作用素 P が一階の偏微分作用素であることに注目すれば前節と全く同じ議論で, $P\eta \in \Sigma_{I_i}$ を得る.

双対を考えることで次の主結果を得る.

定理 8　偏微分作用素 P は, $P\sigma = 0$ を満たす一階の偏微分作用素であるとする. このとき, P は, 各 $i = 1, 2, ..., \ell$ に対し, 剰余ベクトル空間 $\mathbf{C}[z]/I_i$ からそれ自身への線形写像を定める.

例 9　$X = \mathbf{C}^2$, $f_1 = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$, $f_2 = x^2 + y^2 - 1$ とおく. 多項式環に辞書式順序 $x \succ y$ を入れる. イデアル I のグレブナ基底は $\mathrm{Gb} = \{-4y^3 + 3y + 1, x^2 + y^2 - 1\}$ となる. イデアル I の準素イデアル分解は,

$$I_1 = \langle 4y^2 + 4y + 1, 4x^2 - 4y - 5\rangle,\ I_2 = \langle y - 1, x^2\rangle$$

とおくと, $I = I_1 \cap I_2$ で与えられる.

さて, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\frac{1}{f_1(x,y)f_2(x,y)}]$ に対する *annihilator* イデアル $\mathcal{A}nn$ のグレブナ基底を求めると $4y^3 - 3y - 1, x^2 + y^2 - 1, P, Q$ から成ることが分かる. 但し,

$P = (2y + 1)x\partial_x + (-2y^2 + y + 1)\partial_y - 2y + 5$,

$Q = (2y^2 - y - 1)\partial_x + (4y^2 - 2y - 2)x\partial_y + (12y - 6)x$

である. 零階の作用素を, $G_1 = 4y^3 - 3y - 1, G_2 = x^2 + y^2 - 1$ とおき偏微分作用素 P との交換関係を計算してみと,

$$PG_1 - G_1P = -4(2y-1)G_1, PG_2 - G_2P = -2G_1$$

を得る. 形式随伴を取れば

$$G_1P^* - P^*G_1 = -4(2y-1)G_1, G_2P^* - P^*G_2 = -2G_1$$

となる. これらの関係式より

$$P^* : \mathbf{C}[x,y]/I \longrightarrow \mathbf{C}[x,y]/I$$

が *well-defined* であることが容易に確かめられる.

イデアル $I_1 = \langle 4y^2 + 4y + 1, 4x^2 - 4y - 5 \rangle$ に対しても同様の計算をしてみると,

$$P(2y+1)^2 - (2y+1)^2P = -4(y-1)(2y+1)^2,\ P(4x^2-4y-5) - (4x^2-4y-5)P = 6(2y+1)^2$$

を得る. この交換関係式の形式随伴をとれば, 偏微分作用素 P^* が $\mathbf{C}[x,y]/I_1$ からそれ自身への線形写像を与えていることが確認できる. イデアル $I_2 = \langle y-1, x^2 \rangle$ の場合も全く同様にして, $P^* : \mathbf{C}[x,y]/I_2 \longrightarrow \mathbf{C}[x,y]/I_2$ が定義可能なことを確かめることが出来る.

注意 偏微分作用素環でのイデアル $\mathcal{A}nn$ のグレブナ基底は G_1, G_2, P, Q から成るが, この場合は G_1, G_2, P のみでイデアル $\mathcal{A}nn$ を生成していることが分かる. このことを確かめるには, イデアル $\langle G_1, G_2, P \rangle$ のグレブナ基底を計算してもよいが, 双対を取って, 形式随伴作用素 P^* の像空間の余次元を求めて確かめることができる.

実際に, P^* の作用を計算してみよう. 多項式環には, 辞書式順序 $x \succ y$ を入れてあるので, 剰余空間 $\mathbf{C}[x,y]/I$ の自然な単項式基底は $\mathbf{C}[x,y]/I = \mathrm{Span}\{y^2x, yx, x, y^2, y, 1\}$ となる. これらの単項式に P^* を作用させ, イデアル I, I_1, I_2 による剰余を求めると次のようになる.

P^*mb	mod I	mod I_1	mod I_2
P^*y^2x	$(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2})x$	$(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2})x$	0
P^*yx	$(y-1)x$	$(y-1)x$	0
P^*x	$(-2y+2)x$	$(-2y+2)x$	0
P^*y^2	$y^2 + y + 1$	$\frac{3}{4}$	3
P^*y	$2y^2 + 2y - 1$	$-\frac{3}{2}$	3
P^*1	3	3	3

例えば, $y^2 = -y - 1/4 \bmod I_1$ であるが, $-P^*y - (1/4)P^*1 = 3/2 - 3/4 = 3/4$ となっているので, $P^*y^2 \bmod I_1 = P^*(y^2 \bmod I_1)$ が確かに成り立っていることがこの表から読み取れる.

4 多変数留数計算アルゴリズムの局所化

この節では, 中国剰余定理と偏微分作用素に関する前節の結果を用いると, 多変数留数の計算アルゴリズムが実際に局所化できることをしめす. ただし, 議論を簡単にするため今までと同様に, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ の annihilator イデアル $\mathcal{A}nn$ は, 零階の偏微分作用素 $F_1, F_2, ..., F_n$ と多項式係数の一階の偏微分作用素 P により生成されている場合に話を限る.

数式処理を用いて exact に計算することを想定しており, 入力に用いる多項式等はすべて有理数係数であるものとする. アルゴリズムの出力は, 留数値を表現する多項式と留数値の満たすべき方程式からなるが, これらはいずれも有理数係数の多項式として与えられる. 途中の計算でも代数拡大は回避しており, すべての計算は有理数係数の範囲で行うことができることを予め注意しておく.

まず, 多項式環 $\mathbf{Q}[z]$ に項順序をいれ, 以下, 固定する. 与えられた正規列 $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbf{Q}[z]$ の生成するイデアル I の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_\ell$ を取る. イデアル I_i のグレブナ基底から対応する単項式基底 MB_{I_i} を求め,

$$U_i = \mathrm{Span}\{mb \mid mb \in MB_{I_i}\}$$

とおく. 剰余 $\mathbf{Q}[z]/I_i$ はベクトル空間として, U_i と同型である.

次に, 形式随伴作用素 P^* を用いて,

$$V_i = \{P^* u \mid u \in U_i\}$$

とおく. 更に, ヤコビ行列式 $j_F(z) = \dfrac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(z_1, z_2, ..., z_n)}$ を用いて

$$W_i = \{w \mid w(z) = j_F(z) r(z) \bmod I_i, r \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I_i}\}$$

とおく. この時, 次がなり立つ.

命題 10 $U_i = V_i \oplus W_i$, *for* $i = 1, 2, ..., \ell$.

この結果を用いれば, 容易に多変数留数計算アルゴリズムを局所化することが出来る.

例 11

$f_1 = -x^2 + y + 4$,

$f_2 = (-y^4 - 10y^3 - 36y^2 - 56y - 32)x - y^5 - 13y^4 - 66y^3 - 164y^2 - 200y - 96$,

$h(x, y) = -30x^4 + 23x^3 + (y^6 + 92y + 3)x - 4y - 9$

とおき, $\mathrm{Res}_\alpha[\dfrac{h(x,y)dx \wedge dy}{f_1(x,y) f_2(x,y)}]$ の計算を行う.

代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [\frac{1}{f_1(x,y)f_2(x,y)}]$ の *annihilator* イデアル $\mathcal{A}nn$ は, F_1, F_2 と一階の偏微分作用素

$$\begin{aligned} P &= (x^5+x^4-3x^3-2x^2+2x)\partial_x+(2x^6+2x^5-6x^4-4x^3+4x^2)\partial_y \\ &\quad +10x^4+9x^3-16x^2-6x+4 \end{aligned}$$

で生成される.

イデアル $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ の辞書式順序 $y \succ x$ によるグレブナ基底は

$$\mathrm{Gb} = \{-x^{10}-x^9+7x^8+6x^7-18x^6-12x^5+20x^4+8x^3-8x^2, -x^2+y+4\}$$

である. イデアル I_1, I_2, I_3 を

$$I_1 = \langle x^6-6x^4+12x^2-8, x^2-y-4 \rangle,\ I_2 = \langle x^2+x-1, x+y+3 \rangle,\ I_3 = \langle x^2, y+4 \rangle,$$

とおくと, $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ がイデアル I の準素イデアル分解となる. 根基は,

$$\sqrt{I_1} = \langle x^2-2, y+2 \rangle,\ \sqrt{I_2} = \langle x^2+x-1, x+y+3 \rangle,\ \sqrt{I_3} = \langle x, y+4 \rangle$$

である. 単項式基底を用いて剰余空間 $\mathbf{Q}[x,y]/I_i$ を表現するベクトル空間を作ると,

$$U_1 = \mathrm{Span}\{x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1\},\ U_2 = \mathrm{Span}\{x, 1\},\ U_3 = \mathrm{Span}\{x, 1\}$$

となる. 対応する部分ベクトル空間, V_i, W_i $(i=1,2,3)$ の次元を求めておくと,
$\dim V_1 = 4, \dim W_1 = 2, \dim V_2 = 0, \dim W_2 = 2, \dim V_3 = 1, \dim W_3 = 1$ を得る.

部分ベクトル空間 V_1 の基底は, $P^*1, P^*x, P^*x^2, P^*x^3$ の各々を I_1 で剰余をとることで, 次のように求められる.

$$\begin{aligned} &5x^4+5x^3-7x^2-2x+2, \\ &4x^5+4x^4-4x^3, \\ &3x^5+17x^4+2x^3-38x^2+24, \\ &14x^5+16x^4-28x^3-24x^2+16x+16. \end{aligned}$$

部分ベクトル空間 W_1 の基底は $j_F, j_F x$ の I_1 による剰余

$$\begin{aligned} &12x^5+24x^4-48x^3-96x^2+48x+96, \\ &24x^5+24x^4-96x^3-96x^2+96x-96, \end{aligned}$$

で与える. 同様の計算を行うことで次を得る.

$$V_2 = \{0\}, W_2 = \mathrm{Span}\{-x-3, -2x-1\}, V_3 = \mathrm{Span}\{-2x+2\}, W_3 = \mathrm{Span}\{16x\}$$

準備が整ったので, A_1, A_2, A_3 における留数値 $\mathrm{Res}_\alpha[\dfrac{h(x,y)dx \wedge dy}{f_1(x,y)f_2(x,y)}]$ の計算をする. ただし, $h(x,y) = -30x^4 + 23x^3 + (y^6 + 92y + 3)x - 4y - 9$ である.

(i) $A_1 = V(I_1)$ での留数計算

$u_1 = h \, mod \, I_1$ とおくと, $u_1 = 240x^5 - 30x^4 - 1037x^3 - 4x^2 + 1043x + 7$ となる. 直和分解 $u_1 = v_1 + w_1$, $v_1 \in V_1, w_1 \in W_1$ は,

$v_1 = (73/64)P^*1 + (223/256)P^*x - (49/16)P^*x^2 - (265/128)P^*x^3$, $w_1 = j_F(x,y)r_1(x)$ となる. 但し, $r_1(x) = (-179/8) + (16829/768)x$ である. 点 $\alpha \in A_1$ の重複度は 3 に等しいので, $\alpha \in A_1$ における留数値は $3((-179/8) + (16829/768)\alpha)$ となる. 留数値の満たすべき方程式を得るために, イデアル $\langle t - 3r_1(x), x^2 - 2, y + 2\rangle \subset \mathbf{Q}[x,y,t]$ のグレブナ基底を求めると, $\{-32768t^2 - 439910t + 135570313, -16829x + 256t + 17184, y + 2\}$ を得る. 従って, 留数値は $-32768t^2 - 439910t + 135570313 = 0$ を満たす.

(ii) $A_2 = V(I_2)$ での留数計算

$u_2 = h \, mod \, I_2$ とおくと $u_2 = 584x + 828$ となる. A_2 は単純点のみからなり, $V_2 = \{0\}$ が成り立つ. $u_2 = j_F(x,y)r_2(x) \; mod \; I_2$ を満たす r_2 は $r_2(x) = (-1072/5) + (-924/5)x$ であたえられる. 従って, $\alpha \in A_2$ における留数値は $(-1072/5) + (-924/5)\alpha$ と表せる. 多項式環 $\mathbf{Q}[x,y,t]$ におけるイデアル $\langle t - r_2(x), x^2 + x - 1, x + y + 3\rangle$ のグレブナ基底は, $\{5t^2 + 1220t - 139024, 924x + 5t + 1072, 924y - 5t + 1700\}$ となる. 従って, 留数値は $5t^2 + 1220t - 139024 = 0$ を満たす. (iii) $A_3 = V(I_3)$ での留数計算

$u_3 = 3731x + 7$ であり, $u_3 = (7/2)P^*1 + j_F(x,y)(1869/9)$ と表現される. 点 $(0,-4) \in A_3$ の重複度は 2 に等しいので, 求める留数値は 1869/4 である.

以上が, 中国剰余定理と偏微分方程式を利用した多変数留数計算の仕方である. 計算を局所化してあるので, 以前に提案したアルゴリズムに比べ計算効率がよくなっている. 実際, 論文 [10] に述べた方法で留数計算を行うには, まず, ベクトル空間 V とベクトル空間 W の基底を構成し, その後に, $u = h \bmod I$ で決まる 10 次元ベクトル $u \in U$ を $u = v + w$ の形に直和分解する必要がある.

この計算に用いる V と W の基底は, それぞれ

$$
\begin{aligned}
&5x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 2x + 2,\\
&4x^5 + 4x^4 - 4x^3,\\
&3x^6 + 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2,\\
&2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 4x^3,\\
&x^8 + x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4,
\end{aligned}
$$

$$10x^9+9x^8-56x^7-42x^6+108x^5+60x^4-80x^3-24x^2+16x,$$
$$-x^9+14x^8+18x^7-72x^6-60x^5+120x^4+56x^3-64x^2,$$
$$15x^9+11x^8-78x^7-42x^6+132x^5+36x^4-72x^3+8x^2,$$
$$-4x^9+27x^8+48x^7-138x^6-144x^5+228x^4+128x^3-120x^2,$$
$$31x^9+20x^8-162x^7-72x^6+276x^5+48x^4-152x^3+32x^2$$

である. これらを用いて $u\in U$ を $u=v+w$ と分解し, 更に, $w=j_F(x,y)r(x) \bmod I$ となる $r\in \mathbf{Q}[x,y]/\sqrt{I}$ を実際に求め,

$$r=\frac{1869}{8}-\frac{2373647}{3840}x-\frac{1531057}{1920}x^2+\frac{12801}{40}x^3+\frac{1285297}{3840}x^4$$

を得る.

$$\mathrm{Res}_\alpha([\frac{h(x,y)dx\wedge dy}{f_1,f_2}])=\mathrm{Res}_\alpha([\frac{(j_F\cdot r(x)dx\wedge dy}{f_1f_2}]),\quad \alpha\in A$$

が成り立つので, 点 $\alpha\in A$ の重複度を μ_α とおけば, そこでの Grothendieck 留数の値は $\mu_\alpha r(\alpha)$ と等しい. この表現にはまだ無駄があるので準素イデアル分解をして, より簡潔な表現をもとめるのが以前に提唱した計算法である.

5 具体例

この節では, 計算アルゴリズムを局所化したことで, 何故, 計算量を減らすことができるようになったかという理由について考察する. アルゴリズムを局所化することに伴う計算量の変化については, 前の節で, ベクトル空間 W の基底の計算と W_i の基底の計算に注目して議論した. この節では, ベクトル空間 V の基底の計算に注目して考察を加える. 局所化する前のアルゴリズムでは, どこに計算上の無駄があったのかを, 具体的な計算例により示していく. 例として, 次を考える.

$$\begin{aligned} f_1 &= x^6+(y^2-3)x^4+(y^4+y^2+3)x^2+y^6-y^4+y^2-1 \\ f_2 &= x^6+(3y^2-3)x^4+(3y^4+3y^2+3)x^2+y^6-3y^4+3y^2-1 \end{aligned}$$

議論をすすめる前に基本的量を計算しておく. イデアル $I=\langle f_1,f_2\rangle$ の辞書式順序 $x\succ y$ に関するグレブナ基底は

$$\mathrm{Gb}=\{-y^{12}-2y^{10}+3y^2, 13y^2x^2+11y^{10}+7y^8-6y^6+7y^4-19y^2, x^6-3x^4+3x^2+y^6-1\}$$

であり, 対応する単項式基底は

$$yx^5,x^5,yx^4,x^4,yx^3,x^3,yx^2,x^2,y^{11}x,y^{10}x,y^9x,y^8x,y^7x,y^6x,y^5x,$$
$$y^4x,y^3x,y^2x,yx,x,y^{11},y^{10},y^9,y^8,y^7,y^6,y^5,y^4,y^3,y^2,y,1$$

で与えられる. 剰余空間 $\mathbf{Q}[x,y]/I$ を表現するベクトル空間 U は 32 次元となる. イデアル

I の準素イデアル分解は

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \langle y-1, x^2\rangle,\ I_2 = \langle y+1, x^2\rangle,\\
&I_3 = \langle (2y^2+3)x^2 - y^4 - 2y^2, 2x^4 - x^2 + y^4 + 2, x^2 - 2y^6 - 3y^4 - 2y^2 - 4\rangle,\\
&I_4 = \langle y^2, x^3 - 3x^2 + 3x - 1\rangle,\\
&I_5 = \langle y^2, x^3 + 3x^2 + 3x + 1\rangle,
\end{aligned}
$$

とおくと, $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5$ となる. イデアルの根基は,

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{I_1} = \langle y-1, x\rangle,\ \sqrt{I_2} = \langle y+1, x\rangle,\\
&\sqrt{I_3} = \langle y^8 + 3y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 3, x^2 - 2y^6 - 3y^4 - 2y^2 - 4\rangle,\\
&\sqrt{I_4} = \langle y, x-1\rangle,\ \sqrt{I_5} = \langle y, x+1\rangle,
\end{aligned}
$$

である. イデアル I_i の零点集合を A_i とおくと, A_1 と A_2 はそれぞれ 1 点からなり, その重複度は 2 に等しい. A_3 は 16 個の単純点からなる. A_4 と A_5 はともに 1 点からなるがその重複度は 6 である. また, 零点集合 A は 20 個の点からなる.

代数的局所コホモロジー類 σ の annihilator イデアル $\mathcal{A}nn$ は,

$$
\begin{aligned}
P = \ & (3x^{11} - 6x^9 + 12x^7 - 12x^5 + 6x^3 - 3x)\partial_x + (yx^{10} - yx^8 + 3yx^6 - yx^4 + yx^2)\partial_y\\
&+4x^{14} - 24x^{12} + 98x^{10} - 154x^8 + 210x^6 - 122x^4 + 54x^2 - 6
\end{aligned}
$$

とおくと, F_1, F_2, P で生成される. この偏微分作用素 P を用いて, ベクトル空間 V の基底を構成できる. (注. この作用素 P は, 項順序をわざと換えて, 人為的に作った annihilator である)

形式随伴作用素 P^* の単項式基底への作用を計算するとつぎの様になる.

$$
\begin{aligned}
P^*yx^5 &= (1092yx^5 - 780yx^3 + (300y^{11} + 276y^9 - 504y^7 + 276y^5 - 504y^3 + 156y)x)/13\\
P^*x^5 &= (1521x^5 - 1443x^3 + (521y^{10} + 289y^8 - 894y^6 + 549y^4 - 894y^2 + 429)x)/13\\
P^*yx^4 &= (1560yx^4 - 1599yx^2 + 570y^{11} + 267y^9 - 981y^7 + 618y^5 - 981y^3 + 507y)/13\\
P^*x^4 &= (1989x^4 - 2262x^2 + 791y^{10} + 280y^8 - 1371y^6 + 891y^4 - 1371y^2 + 780)/13\\
P^*yx^3 &= (858yx^5 - 546yx^3 + (192y^{11} + 186y^9 - 360y^7 + 186y^5 - 360y^3 + 156y)x)/13\\
P^*x^3 &= (1131x^5 - 936x^3 + (323y^{10} + 202y^8 - 591y^6 + 345y^4 - 591y^2 + 312)x)/13\\
P^*yx^2 &= (1209yx^4 - 1131yx^2 + 390y^{11} + 195y^9 - 702y^7 + 429y^5 - 702y^3 + 390y)/13\\
P^*x^2 &= (1482x^4 - 1521x^2 + 521y^{10} + 211y^8 - 933y^6 + 588y^4 - 933y^2 + 546)/13
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^*y^{11}x &= 0\\
P^*y^{10}x &= 0\\
P^*y^9x &= 0\\
P^*y^8x &= 0\\
P^*y^7x &= 0\\
P^*y^6x &= 0\\
P^*y^5x &= 0\\
P^*y^4x &= 0\\
P^*y^3x &= 0\\
P^*y^2x &= 0\\
P^*yx &= (624yx^5 - 312yx^3 + (84y^{11} + 96y^9 - 216y^7 + 96y^5 - 216y^3 + 156y)x)/13\\
P^*x &= (780x^5 - 507x^3 + (149y^{10} + 109y^8 - 333y^6 + 174y^4 - 333y^2 + 234)x)/13\\
P^*y^{11} &= (-3y^{11} - 9y^9 - 9y^7 - 9y^5 - 9y^3)/13\\
P^*y^{10} &= (-3y^{10} - 9y^8 - 9y^6 - 9y^4 - 9y^2)/13\\
P^*y^9 &= (-3y^{11} - 9y^9 - 9y^7 - 9y^5 - 9y^3)/13\\
P^*y^8 &= (-3y^{10} - 9y^8 - 9y^6 - 9y^4 - 9y^2)/13\\
P^*y^7 &= (-3y^{11} - 9y^9 - 9y^7 - 9y^5 - 9y^3)/13\\
P^*y^6 &= (-3y^{10} - 9y^8 - 9y^6 - 9y^4 - 9y^2)/13\\
P^*y^5 &= (-3y^{11} - 9y^9 - 9y^7 - 9y^5 - 9y^3)/13\\
P^*y^4 &= (-3y^{10} - 9y^8 - 9y^6 - 9y^4 - 9y^2)/13\\
P^*y^3 &= (-3y^{11} - 9y^9 - 9y^7 - 9y^5 - 9y^3)/13\\
P^*y^2 &= (-3y^{10} - 9y^8 - 9y^6 - 9y^4 - 9y^2)/13\\
P^*y &= (858yx^4 - 663yx^2 + 207y^{11} + 114y^9 - 432y^7 + 231y^5 - 432y^3 + 273y)/13\\
P^*1 &= 1014x^4 - 858x^2 + 272y^{10} + 127y^8 - 549y^6 + 309y^4 - 549y^2 + 351)/13
\end{aligned}
$$

ベクトル空間 V は 12 次元であるので, 上記のベクトルの張る空間は 12 次元となる. さて, 零点集合 A_3 に属する 16 個の点は全て単純点であるので, 形式随伴作用素 P^* の像となる多項式はイデアル I_3 に属することになる (i.e. $\mathrm{Im}P^* \subseteq I_3$). そのため, V の要素は多項式としての次数がどうしても高くなってしまう. つまり 16 個の単純点の存在がベクトル空間 V の基底の計算を複雑にしていることになる. 他方で, A_3 は単純点からなるので, $V_3 = \{0\}$ となり, こうして求めた V の基底は A_3 での留数計算には全く不必要なものとなる. このような"無駄"を中国剰余定理により局所化することで取り除いたのが今回の計算法である.

さて, ベクトル空間 V_i は, 形式随伴作用素 P^* のベクトル空間 U_i への作用の像集合を計算することで求めることが出来る. ベクトル空間 U_1, U_2 の単項式基底は $1, x$ であり, ベクトル空間 U_4, U_5 の単項式基底は $1, y, x, xy, x^2, yx^2$ である. 従って, ベクトル空間 V_i の基底を計算するには, $P^*1, P^*y, P^*x, P^*yx, P^*x^2, P^*yx^2$ を計算し, 対応するイデアルでの剰余を求めればよいことになる. 局所化することで必要な計算がかなり減ったことになる.

さて, いままで計算に用いていた偏微分作用素 P は, 代数的局所コホモロジー類 σ の annihilator を求めるアルゴリズムによる計算結果に”人の手を加えて”作ったものであり, その意味で自然なものではない. 通常の方法で σ の annihilator を計算すると, $\mathcal{A}nn$ の生成元として F_1, F_2 と次の 3 つの偏微分作用素を得る.

$$P_1 = (13yx^2 + 11y^9 + 7y^7 - 6y^5 + 7y^3 - 19y)\partial_y + 26x^2 + 110y^8 + 56y^6 - 36y^4 + 28y^2 - 38$$

$$P_2 = (39x^2 - 6y^{10} + 21y^8 + 21y^6 - 18y^4 + 21y^2 - 39)\partial_x - 26x^5 + 130x^3 \\ +(-80y^{10} - 58y^8 + 72y^6 - 58y^4 + 72y^2 + 130)x$$

$$P_3 = (y^{10} + 3y^8 + 3y^6 + 3y^4 + 3y^2)x\partial_x + 2y^{10} + 6y^8 + 6y^6 + 6y^4 + 6y^2$$

今までと同様に, これらの偏微分作用素を用いて, ベクトル空間 V_i の基底を構成することができる.

偏微分作用素 P_3^* を用いると V_1, V_2 がもとまる. また, 偏微分作用素 P_1^*, P_2^* を組み合わせて用いると V_4, V_5 が計算できる. A_1, A_2 と A_4, A_5 では零点の重複の仕方が異なるためにこのようなことが生じている.

一般に, 代数的局所コホモロジー群の直和分解

$$H^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) = H^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus H^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus H^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_X)$$

に対応した代数的局所コホモロジー類の直和分解を

$$\sigma = \sigma_{I_1} + \sigma_{I_2} + \cdots + \sigma_{I_\ell}, \quad \sigma_{I_i} \in \Sigma_{A_i}$$

とおくとき, annihilator イデアル $\mathcal{A}nn$ の局所化を考えることで, σ_{I_i} の満たすべき偏微分方程式系を構成できる. たとえばいま扱っている例の場合, イデアル $\mathcal{A}nn$ を A_4 に局所化すると

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1, y^2, (12x - 12)\partial_x - x^2 + 44x - 7, y\partial_y + 2$$

をえる. ベクトル空間 V_4 を決定するのに, ここに現れた 2 つの偏微分作用素

$$(12x - 12)\partial_x - x^2 + 44x - 7, y\partial_y + 2$$

を用いることもできる.

現在のところ, イデアル $\mathcal{A}nn$ の局所化の計算には偏微分作用素環でのグレブナ基底の計算を利用している. この局所化アルゴリズムの効率化を図ることはそれ自体興味あるテーマだと思う.

参考のため, 以下に, 4 つの表を添えておく. これらは, イデアル I が定めた単項式基底へ形式随伴作用素を作用させ, イデアル I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 による剰余を計算したものである.

$$P = (3x^{11} - 6x^9 + 12x^7 - 12x^5 + 6x^3 - 3x)\partial_x + (yx^{10} - yx^8 + 3yx^6 - yx^4 + yx^2)\partial_y$$
$$+4x^{14} - 24x^{12} + 98x^{10} - 154x^8 + 210x^6 - 122x^4 + 54x^2 - 6$$

P^*mb	mod I_1	mod I_2	mod I_3	mod I_4	mod I_5
P^*yx^5	0	0	0	$660yx^2 - 1068yx + 444y$	$-660yx^2 - 1068yx - 444y$
P^*x^5	0	0	0	$837x^2 - 1389x + 591$	$-837x^2 - 1389x - 591$
P^*yx^4	0	0	0	$597yx^2 - 960yx + 399y$	$597yx^2 + 960yx + 399y$
P^*x^4	0	0	0	$744x^2 - 1224x + 519$	$744x^2 + 1224x + 519$
P^*yx^3	0	0	0	$534yx^2 - 852yx + 354y$	$-534yx^2 - 852yx - 354y$
P^*x^3	0	0	0	$654x^2 - 1065x + 450$	$-654x^2 - 1065x - 450$
P^*yx^2	0	0	0	$471yx^2 - 744yx + 309y$	$471yx^2 + 744yx + 309y$
P^*x^2	0	0	0	$567x^2 - 912x + 384$	$567x^2 + 912x + 384$
$P^*y^{11}x$	0	0	0	0	0
$P^*y^{10}x$	0	0	0	0	0
P^*y^9x	0	0	0	0	0
P^*y^8x	0	0	0	0	0
P^*y^7x	0	0	0	0	0
P^*y^6x	0	0	0	0	0
P^*y^5x	0	0	0	0	0
P^*y^4x	0	0	0	0	0
P^*y^3x	0	0	0	0	0
P^*y^2x	0	0	0	0	0
P^*yx	0	0	0	$408yx^2 - 636yx + 264y$	$-408yx^2 - 636yx - 264y$
P^*x	0	0	0	$483x^2 - 765x + 321$	$-483x^2 - 765x - 321$
P^*y^{11}	-3	3	0	0	0
P^*y^{10}	-3	-3	0	0	0
P^*y^9	-3	3	0	0	0
P^*y^8	-3	-3	0	0	0
P^*y^7	-3	3	0	0	0
P^*y^6	-3	-3	0	0	0
P^*y^5	-3	3	0	0	0
P^*y^4	-3	-3	0	0	0
P^*y^3	-3	3	0	0	0
P^*y^2	-3	-3	0	0	0
P^*y	-3	3	0	$345yx^2 - 528yx + 219y$	$345yx^2 + 528yx + 219y$
P^*1	-3	-3	0	$402x^2 - 624x + 261$	$402x^2 + 624x + 261$

$$P_1 = (13yx^2 + 11y^9 + 7y^7 - 6y^5 + 7y^3 - 19y)\partial_y + 26x^2 + 110y^8 + 56y^6 - 36y^4 + 28y^2 - 38$$

P^*mb	mod I_1	mod I_2	mod I_3	mod I_4	mod I_5
$P_1^* x^5 y$	0	0	0	0	0
$P_1^* x^5$	0	0	0	$83x^2 - 170x + 81$	$-83x^2 - 170x - 81$
$P_1^* x^4 y$	0	0	0	0	0
$P_1^* x^4$	0	0	0	$81x^2 - 160x + 73$	$81x^2 + 160x + 73$
$P_1^* x^3 y$	0	0	0	0	0
$P_1^* x^3$	0	0	0	$73x^2 - 138x + 59$	$-73x^2 - 138x - 59$
$P_1^* x^2 y$	0	0	0	0	0
$P_1^* x^2$	0	0	0	$59x^2 - 104x + 39$	$59x^2 + 104x + 39$
$P_1^* y^{11} x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^{10} x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^9 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^8 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^7 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^6 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^5 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^4 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^3 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^2 x$	0	0	0	0	0
$P_1^* yx$	0	0	0	0	0
$P_1^* x$	0	0	0	$39x^2 - 58x + 13$	$-39x^2 - 58x - 13$
$P_1^* y^{11}$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^{10}$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^9$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^8$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^7$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^6$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^5$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^4$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^3$	0	0	0	0	0
$P_1^* y^2$	0	0	0	0	0
$P_1^* y$	0	0	0	0	0
$P_1^* 1$	0	0	0	$13x^2 - 19$	$13x^2 - 19$

$$P_2 = (39x^2 - 6y^{10} + 21y^8 + 21y^6 - 18y^4 + 21y^2 - 39)\partial_x - 26x^5 + 130x^3 \\ +(-80y^{10} - 58y^8 + 72y^6 - 58y^4 + 72y^2 + 130)x$$

P^*mb	mod I_1	mod I_2	mod I_3	mod I_4	mod I_5
$P_2^*yx^5$	0	0	0	$1495yx^2 - 2288yx + 949y$	$1495yx^2 + 2288yx + 949y$
$P_2^*x^5$	0	0	0	$1495x^2 - 2288x + 949$	$1495x^2 + 2288x + 949$
$P_2^*yx^4$	0	0	0	$1222yx^2 - 1820yx + 754y$	$-1222yx^2 - 1820yx - 754y$
$P_2^*x^4$	0	0	0	$1222x^2 - 1820x + 754$	$-1222x^2 - 1820x - 754$
$P_2^*yx^3$	0	0	0	$949yx^2 - 1352yx + 559y$	$949yx^2 + 1352yx + 559y$
$P_2^*x^3$	0	0	0	$949x^2 - 1352x + 559$	$949x^2 + 1352x + 559$
$P_2^*yx^2$	0	0	0	$676yx^2 - 884yx + 364y$	$-676yx^2 - 884yx - 364y$
$P_2^*x^2$	0	0	0	$676x^2 - 884x + 364$	$-676x^2 - 884x - 364$
$P_2^*y^{11}x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^{10}x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^9x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^8x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^7x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^6x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^5x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^4x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^3x$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^2x$	0	0	0	0	0
P_2^*yx	0	0	0	$403yx^2 - 416yx + 169y$	$403yx^2 + 416yx + 169y$
P_2^*x	0	0	0	$403x^2 - 416x + 169$	$403x^2 + 416x + 169$
$P_2^*y^{11}$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^{10}$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^9$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^8$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^7$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^6$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^5$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^4$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^3$	0	0	0	0	0
$P_2^*y^2$	0	0	0	0	0
P_2^*y	0	0	0	$130yx^2 + 52yx - 26y$	$-130yx^2 + 52yx + 26y$
P_2^*1	0	0	0	$130x^2 + 52x - 26$	$-130x^2 + 52x + 26$

$$P_3 = (y^{10} + 3y^8 + 3y^6 + 3y^4 + 3y^2)x\partial_x + 2y^{10} + 6y^8 + 6y^6 + 6y^4 + 6y^2$$

P^*mb	mod I_1	mod I_2	mod I_3	mod I_4	mod I_5
$P_3^*yx^5$	0	0	0	0	0
$P_3^*x^5$	0	0	0	0	0
$P_3^*yx^4$	0	0	0	0	0
$P_3^*x^4$	0	0	0	0	0
$P_3^*yx^3$	0	0	0	0	0
$P_3^*x^3$	0	0	0	0	0
$P_3^*yx^2$	0	0	0	0	0
$P_3^*x^2$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^{11}x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^{10}x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^9x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^8x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^7x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^6x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^5x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^4x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^3x$	0	0	0	0	0
$P_3^*y^2x$	0	0	0	0	0
P_3^*yx	0	0	0	0	0
P_3^*x	0	0	0	0	0
$P_3^*y^{11}$	13	−13	0	0	0
$P_3^*y^{10}$	13	13	0	0	0
$P_3^*y^9$	13	−13	0	0	0
$P_3^*y^8$	13	13	0	0	0
$P_3^*y^7$	13	−13	0	0	0
$P_3^*y^6$	13	13	0	0	0
$P_3^*y^5$	13	−13	0	0	0
$P_3^*y^4$	13	13	0	0	0
$P_3^*y^3$	13	−13	0	0	0
$P_3^*y^2$	13	13	0	0	0
P_3^*y	13	−13	0	0	0
P_3^*1	13	13	0	0	0

参 考 文 献

[1] A. M. Dickenstein and C. Sessa, *Duality methods for the membership problem*, Progress in Math. **94** (1991) Effective Methods in Algebraic Geometry (eds by T. Mora and C. Traverso), 89–103.

[2] M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563-579.

[3] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II*, Inventiones Math. **49** (1978), 121-135.

[4] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir–a computer algebra system*, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (eds P.S. Wang), ACM New York (1992), 387–396 (ftp: endeavor.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir).

[5] T. Shimoyama and K. Yokoyama, *Localization and primary decomposition of polynomial ideals*, J. Symbolic Computation **22** (1996), 247–277.

[6] S. Tajima, *Grothendieck residue calculus and holonomid D-modules*, Proc. of the Fifth International Conference on Complex Analysis, Beijing 1997, 301–304.

[7] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** 「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[8] S. Tajima,*An algorithm for computing Grothendieck residues*, Proc. Hayama Symposium on Several Complex Variables 1998, (1999), 115-120.

[9] 田島慎一, 中村弥生, D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 **7** (1999), 2–10.

[10] 田島慎一, 中村弥生, 多変数有理関数の留数計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 71–81.

[11] S. Tajima and Y. Nakamura, *Computing point residues for a shape basis case via differential operators*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1158** 「超局所解析とその周辺」(2000), 87–97.

[12] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www.math.s.kobe-u.ac.jp).